IV ТАРАУ. ТҰТАС ОРТА ДИНАМИКАСЫНЫҢ НЕГІЗГІ ТЕОРЕМАЛАРЫ МЕН ТЕҢДЕУЛЕРІ

4.1. Үзіліссіздік теңдеуі

Тұтас орта механикасы курсында негізінен материалдық денелердің қозғалыс заңдары қарастырылады. Материалдық денелер деп, инерция қасиеттеріне ие бола алатын денелерді айтады. Математикалық тұрғыдан инерцияның қасиеті массамен сипатталады. m массаны толық V көлем үшін және сол сияқты оның кез келген m_i бөлшектері үшін де енгізуге болады

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Теориялық механикада көлемсіз материалдық нүктеге белгілі бір m масса тағайындалады. Сонымен материалдық нүкте деген феноменологиялық ұғым енгізіледі. Ал тұтас орта механикасында мұндай ұғым қолданылмайды. Нақты дененің үздіксіз материямен толтырылған көлемінің инерттілік қасиеті ортаның нүктелерімен байланысты емес, себебі нүктенің өлшемі жоқ, яғни массасы да болмайды. Бірақ тұтас орта динамикасының теңдеуі ортаны толтырып тұрған кез келген нүкте үшін орындалатын ортаның қозғалыс заңдылығын өрнектейді. Сондықтан тұтас орта механикасы субстанциялардың (масса, күш, энергия және т.б.) өздерімен емес, олардың берілген ортадағы тығыздығының таралуымен анықталады.

Тұтас орта механикасында массаның орнына төмендегідей жолмен анықталатын **ортаның тығыздығы** ρ **ұғымы** қолданылады

$$\rho^* = \frac{\Delta m}{\Delta V} .$$

ΔV көлеміндегі Δm массаның жайғасуын заттардың **орташа тығыздығы** деп атайды. Берілген нүктедегі **ортаның нақты тығыздығы** келесі шек арқылы анықталады:

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

Ортаның тығыздығы ρ Лагранж және Эйлер айнымалыларының скаляр функциясы болып табылады

$$\rho\left(\xi^k, t\right), \quad \rho\left(x^k, t\right).$$

Егер көлемнің әрбір нүктесінде тығыздықтың ρ мәндері белгілі болса, онда тығыздықтың скаляр функциясының өрісі тығыздық өрісі деп аталады. Егер тығыздықтар өрісі $\rho = \rho\left(\xi^k\right)$ немесе $\rho = \rho\left(x^k\right)$ уақытқа тәуелсіз болса, онда тығыздықтар өрісі стационар деп аталады. Егер тығыздықтар $\rho = \rho(t)$ өрісі x^k координаталарға тәуелсіз, тек қана уақытқа t тәуелді болса ондай өрісті біртекті өріс дейді.

Шынында да V көлемді алып жатқан ортаның тығыздықтар өрісі ρ белгілі болса, онда дененің толық массасы төмендегі интеграл арқылы табылады

$$m = \int_v \rho dV.$$

Массаның сақталу заңы Ньютон механикасының іргелі заңдарының бірі. «Тұтас ортаның біртекті бөлшектерінен тұратын кез келген жеке көлемінің массасы қозғалыс кезіндегі барлық уақытта тұрақты болады». Бұл анықтама релятивтік жуықтауда орындалатын тәжірибе арқылы тағайындалған табиғат заңы. Кез келген шаманың өзгерісі уақыт бойынша алынған дербес туындымен сипатталатындықтан массаның сақталу заңы математикалық түрде былай жазылады

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad \text{немесе} \quad \frac{d}{dt}\int_v \rho dV = 0. \qquad (4.1)$$

Тұтас ортада тығыздық ρ мен жылдамдықтың $\vec{v}$ таралуына массаның сақталу принципі белгілі бір шектеу жасағанмен (4.1) арақатынасы универсал болып табылады. Ол кез келген орта мен қозғалыс үшін және үздікті қозғалыс жағдайында да орындалады. (4.1) теңдеуі үзіліссіз қозғалыс үшін ρ мен $\vec{v}$ -ны байланыстыратын, үзіліссіздік теңдеуі деп аталынатын теңдеу түрінде де өрнектеледі. Үзіліссіздік теңдеуі тұтас орта механикасындағы ортаның тұтастық шартын өрнектейтін негізгі динамикалық теңдеулердің бірі болып табылады. Оны Лагранж айнымалылары, сол сияқты Эйлер айнымалылары арқылы да жазуға болады.

4.1.1. Лагранж айнымалылары түріндегі үзіліссіздік теңдеуі

Егерде $\rho = \rho\left(\xi^k, t\right)$, $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ және $dV_\xi = J d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ екендігін ескерсек, мұндағы $J = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right|$ – координаталар өзгерісінің якобианы, массаның сақталу принципі (4.1) мына түрде жазылады

$$\frac{d}{dt}\int_{V_\xi} \rho\left(\xi^k, t\right) J d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = 0 .$$

Интегралдық формадағы үзіліссіздік теңдеуі, тұтас ортаның жеке көлеміндегі V_ξ массасы өзгермей сақталатындығын көрсетеді. Бұл шартты пайдалану үшін ρ интегралданатын функция болса жеткілікті. Егер тығыздық пен жылдамдық үздіксіз және Лагранж айнымалылары бойынша туындылары үздіксіз мәнге ие болса, онда интегралдық шартты дифференциалдық арақатынаспен ауыстыруға болады.

Шынында да, уақыт бойынша алынған туындыны интеграл белгісінің астына енгізсек

$$\int_{V_\xi} \frac{d}{dt}(J\rho)dV_\xi = 0.$$

Бұдан көлем кез келген мәнге ие бола алатындықтан

$$\frac{d}{dt}(J\rho) = 0. \qquad (4.2)$$

Бұл дифференциалдық теңдеу Лагранж айнымалылары арқылы жазылған дифференциалдық формадағы үзіліссіздік теңдеуі болып табылады. Интегралдағаннан кейін Лагранж айнымалылары түріндегі үзіліссіздік теңдеуге келеміз

$$\rho J = \rho_o J_o,$$

мұндағы «0» индексімен $t = t_o$ уақыт мезгіліне, яғни $\rho_o = \rho(\xi^k, t_o)$, $J_o = \sqrt{\overset{o}{g}(\xi^k, t_o)}$ сәйкес шамалардың мәндері белгіленген:

$$J = \sqrt{\hat{g}} = \hat{\vec{э}}_i \hat{\vec{э}}_i .$$

Егер кез келген жекеленген көлем уақыт өтуіне байланысты өзгермейтін болса, ондай тұтас орта **сығылмайтын орта** делінеді, яғни

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{немесе} \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \text{бұдан} \quad \rho = \rho(\xi^k).$$

Сығылмайтын ортадағы тығыздық тек Лагранж координатасының функциясы болса уақытқа тәуелсіз, яғни сығылмайтын ортадағы белгіленген бөлшектердің тығыздығы қозғалыстың барлық уақытында да өзгермей тұрақты болып

қалады. Егер орта біртекті болса, онда тығыздық тұрақты $\rho = \text{const}$ болады.

4.1.2.Эйлер айнымалылары түріндегі үзіліссіздік теңдеуі

Енді үзіліссіздік теңдеуінің түрін Эйлер айнымалылары арқылы табайық. Массаның сақталу заңына (4.1)-ге сүйенсек, қозғалмалы көлем арқылы алынған интеграл нольге тең

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\vec{v}\right)\right]dV = \int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_i\left(\rho v^i\right)\right]dV = 0.$$

Көлемді өз еркімізше таңдап алуға болғандықтан, Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген Эйлердің үзіліссіздік теңдеуіне келеміз

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_i\left(\rho v^i\right) = 0. \qquad (4.3)$$

Бұл теңдеуді тұтас орта механикасының **негізгі дифференциалдық теңдеу**і деп те атайды. Векторлық анализ ережесін пайдаланып және толық туынды ұғымын ескеріп (4.3) формуланы мына түрде жазуға болады

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla_i v^i = 0.$$

(4.3) теңдеуінің тік бұрышты декарт координаталар жүйесіндегі түрі

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\partial\left(\rho v^1\right)}{\partial x^1} + \frac{\partial\left(\rho v^2\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial\left(\rho v^3\right)}{\partial x^3} = 0.$$

Егер **орта сығылмайтын болса,** онда үзіліссіздік теңдеуі мынаны береді

$$\nabla_i\left(v^i\right)=0. \qquad (4.3)'$$

Тік бұрышты декарт координаталар жүйесінде жоғарғы теңдеу мына түрде жазылады

$$\operatorname{div}(\vec{v})=\frac{\partial\left(v^1\right)}{\partial x^1}+\frac{\partial\left(v^2\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial\left(v^3\right)}{\partial x^3}=0.$$

Бұл арақатынас сығылмайтын ортаның жылдамдық өрісі **соленоидті өріс** болып табылатындығын білдіреді.

Үзіліссіздік теңдеуінің (4.3) түрі ортаның қасиеттеріне тәуелсіз (ауа, су, сұйық металл т.б.) универсалдық сипатта болады және кез келген материалдық ортаның қозғалысында орындалады.

Үзіліссіздік теңдеуіне сығылатын орта жағдайында төрт $\left(\rho, v^1, v^2, v^3\right)$, ал сығылмайтын орта жағдайында үш $\left(v^1, v^2, v^3\right)$ белгісіз функциялар кіреді. Тұтас орта механикасының есептерін шешу үшін жалғыз үзіліссіздік теңдеуі, яғни массаның сақталу заңы жеткіліксіз. Оны қозғалыс мөлшерінің сақталу заңы, қозғалыс мөлшері моментінің сақталу заңының теңдеулерімен толықтыру қажет. Сол себепті ортаға әсер ететін әртүрлі күштер арқылы анықталатын тұтас орта қозғалысының заңдылықтарын сипаттайтын теңдеулерді қорытуды қарастырайық.

4.2. Көлемдік және беттік күштер. Кернеулер тензоры

Материалдық ортаның қозғалысын және осы қозғалысты тудыратын себептерді қарастырайық. Ол үшін ортаға әсер ететін күштерді енгізейік. Күш – векторлық шама. Тұтас орта механикасындағы күш ұғымы материалдық нүкте механикасы және өзгермейтін жүйелермен салыстырғанда күрделірек. Теориялық механикада негізінен шоғырланған күштерді, яғни

нүктеге әсер ететін шекті күштерді қарастырады. Тұтас орта механикасында біз негізінен таралған күштермен, яғни көлемнің әрбір бөлігіне, немесе тұтас орта бетінің әрбір элементіне әсер ететін күштермен істес боламыз. Көлемнің немесе беттің шексіз аз элементі нольге ұмтылғанда оған әсер ететін күштің бас векторы да нольге ұмтылады.

4.2.1. Көлемдік (массалық) күштер

V көлемі немесе барлық масса бойынша таралған күштерді **көлемдік** немесе **массалық күштер** деп атайды.

Жоғарыда көрсетілгендей, тұтас орта механикасында массаның орнына ортаның тығыздық ұғымы ендіріледі. Мұндай тәсіл V көлемі бойынша таралған әсер етуші күштерге де пайдаланылады. $\Delta\vec{f}$ арқылы Δm массаның элементіне әсер ететін массалық күштердің бас векторын белгілейік. Сонда берілген нүктедегі массалық күштердің тығыздық векторы

$$\vec{F} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\vec{f}}{\Delta m}.$$

Күш тығыздығының векторы $\vec{F}$ таңдап алынған M нүктеге және уақытқа тәуелді болсын дейік, яғни

$$\vec{F} = \vec{F}(M, t).$$

Көлемі V деформацияланған тұтас ортаға массалық күштердің әсер ету эффектісі күш тығыздығының бас векторы $\vec{F}$ және ортаға күш түсіру әсерінен пайда болатын бас момент арқылы өрнектеледі

$$\int_V \rho\vec{F}dV, \qquad \int_V \vec{r} \times \rho\vec{F}dV.$$

Абсолют қатты дене механикасында кез келген күштер жүйелерінің әсері олардың бас векторының және бас моментінің әсерлеріне эквивалентті, ал деформацияланатын дене

механикасында материалдық денедегі күштердің таралу характері маңызды роль атқарады. Массалық күштерге ауырлық күші, инерция күші, электромагнит өрісінің күші, гравитациялық күштер және т.б. жатады.

4.2.2. Беттік күштер

Тұтас орта механикасында негізгі рольді массалық күштер емес, беттік күштер атқарады. Беттік күштер дегеніміз, тұтас ортаның σ беттері бойынша таралған күштер. Бұл күштер материалдық бөлшектердің өзара әсерімен байланысты. Мысалы, егер ыдыстағы суды алса, онда судың қабырғамен түйіскен жеріндегі σ бетте өзара әсер күші байқалады.

$\Delta\sigma$ элементар ауданға әсер ететін беттік күштердің бас векторын $\Delta\vec{R}$ арқылы белгілейік. **Олардың қатынасы**

$$\vec{P} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta\sigma}$$

$\Delta\sigma$ ауданына әсер ететін беттік күштердің таралу тығыздығын анықтайтын вектор. Мысал ретінде екі түйісетін көлемдерге ΔV_1 және ΔV_2-ге әсер ететін тұтқыр өзара әсер күштерін, қысым күштерін т.б. келтіруге болады. $\vec{P}$ **векторын берілген $\Delta\sigma$ ауданшаға әсер ететін кернеу векторы деп те атайды.**

Беттік күштің тығыздығы $\vec{P}$ тек уақытқа, таңдап алынған M нүктесіне және осы нүктенің бетіне жүргізілген $\vec{n}$ нормальдың бағытына тәуелді, ал беттің өзінің түріне байланысты емес, яғни

$$\vec{P} = \vec{P}(M, t, \vec{n}).$$

$\vec{n}$ нормальдың бағытын $\Delta\vec{R} = \vec{P}\Delta\sigma$ күші әсер ететін ортаның бөлігіне қатысты оның сырт жағынан өтетіндей етіп таңдаймыз.

Массалық күштер тығыздығының векторы $\vec{F}$ кеңістік нүктелері мен уақыттың бірмәнді векторлық функциясы болып **векторлық өрісті** құрайды.

Беттік күштердің тығыздығы, $\vec{P}_n$ кернеу векторын тудырады. Бұл кернеу векторы кеңістіктің әрбір нүктесіндегі ауданшаның бағдарына байланысты болғандықтан $\vec{P}_n$ шексіз көп мәндердің жиынына ие, сондықтан вектор өрісі болмайды.

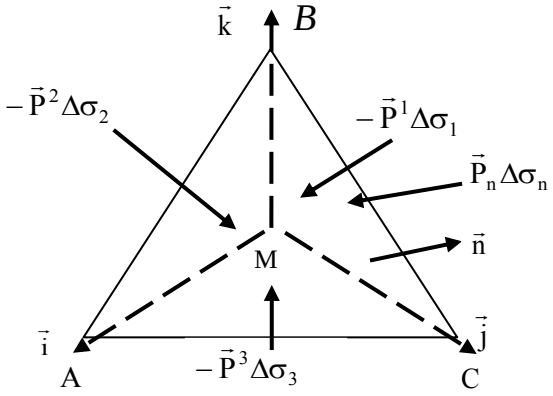
Нормалі $\vec{n}$ ауданшадағы, кернеу векторы $\vec{P}_n$ кез келген жаққа бағытталуы мүмкін. Оны $\vec{n}$ бағытына және оған перпендикуляр көлемнің бетіне жанама $\vec{\tau}$ бағытына жіктеуге болады. $P_n\vec{n}$ құраушысы – **нормаль кернеу**, ал $P_\tau\vec{\tau}$ құраушысы –**жанама кернеу** деп аталады. $\vec{P}_n$ кернеуі нормаль бағытымен материалдың М нүктесінде созылуын ($\vec{P}_n > 0$) немесе сығылуын ($\vec{P}_n < 0$), ал жанама кернеу $\vec{P}_\tau$ ығысуын тудырады.

Барлық денеге беттік күштердің әсер ету эффектісі бас вектормен және бас моментпен сипатталады: $\int\limits_\sigma \vec{P}d\sigma$, $\int\limits_\sigma \vec{r}\times\vec{P}d\sigma$.

Ішкі беттік күштер өзара теңгеріледі.

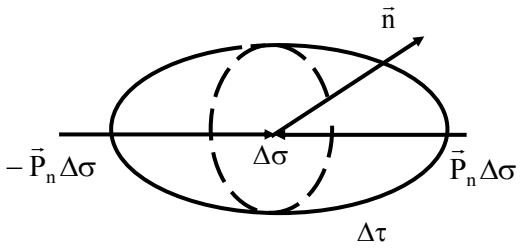
4.2.3. Кернеулер тензоры

$\vec{P}$ кернеу векторын $\vec{n}$ орттың (бірлік вектордың) және тек уақыт пен координаталарының функциясы болатын ауданшаның бағытына тәуелсіз екінші рангілі тензорға көбейтіндісі ретінде көрсетуге болады, демек **тензорлық өрісті** құрайды. Ол үшін ортадан бөліп алынған төбесі М нүктесінде орналасқан элементар триэдрді қарастырайық (3-сурет).



3-сурет

ABC үшбұрышының ауданын $\Delta\sigma_n$, ал BMC, AMC және AMB үшбұрыштарының аудандарын сәйкес $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3$, деп белгілейік. $\Delta\sigma$-ның индекстері 1,2,3 осы аудандарға түсірілген кернеулердегідей $\vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3$, берілген $\Delta\sigma_i$ ауданға перпендикуляр координаталардың осьтерін білдіреді. $\Delta\sigma$ ауданының алдыңғы және сыртқы жақтарын бөліп қарастырайық. Сонымен бірге алдыңғы жағы ретінде $\vec{n}$ векторының басы қараған жағын (4-сурет) алайық. Ойша тұтас ортаны екіге бөліп, оң жағындағы бөлігін алып тастайық. Ал оның $\Delta\sigma$ қима бетке тудырып тұрған күш әсерін беттік күшпен $\vec{P}_n\Delta\sigma$ алмастырайық.



4-сурет

Ал керісінше болса, онда әсер және қарсы әсер заңы бойынша, алып тасталған бөлігіне эквивалентті сыртқы жақтан түсірілетін күш $\vec{P}_n\Delta\sigma$ тең болады.

Массасы Δm шексіз аз кішкентай триэдрді абсолют қатты дене ретінде алып, қарастырылып отырған жүйенің инерция центрінің қозғалыс теңдеуін жазайық

$$\Delta m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}\Delta m + \vec{P}_n\Delta\sigma_n - \vec{P}^1\Delta\sigma_1 - \vec{P}^2\Delta\sigma_2 - \vec{P}^3\Delta\sigma_3, \quad (4.4)$$

мұндағы $\vec{v}_c$ – триэдрдің инерция центрінің жылдамдық векторы, $\vec{P}_n, \vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3$ - сәйкес аудандарға түсірілген кернеу векторлары. (4.4) теңдеуінің оң жағындағы соңғы үш мүшенің таңбасы минус, себебі $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3$ ауданының сыртқы жақтары біз қабылдаған осьтердің бағытында $\vec{э}_1 = \vec{i}, \quad \vec{э}_2 = \vec{j}, \quad \vec{э}_3 = \vec{k}$ «сыртқы» жақтары болып табылады.

(4.4) теңдеуіндегі сол жақтағы мүшеде және теңдіктің оң жағындағы бірінші мүшеде көлемге пропорционал $\Delta m = \rho\Delta V$ элементарлық масса бар, яғни ΔV-ға қатысты ол үшінші ретті аз шама, ал қалған мүшелері элементар Δσ аудандарға пропорционал екінші ретті аз шамалар. Сондықтан жоғарғы ретті аз шамаларды ескермей былай жазуға болады

$$\vec{P}_n \Delta\sigma_n = \vec{P}^1 \Delta\sigma_1 + \vec{P}^2 \Delta\sigma_2 + \vec{P}^3 \Delta\sigma_3 .$$

$\Delta\sigma_i = n_i \Delta\sigma_n$ ескеріп

$$\vec{P}_n = n_1 P^1 + n_2 P^2 + n_3 P^3 \quad \text{немесе} \quad \vec{P}_n = n_i P^i \qquad (4.5)$$

аламыз.

Координаталар осьтеріндегі проекциялары

$$P_{n1} = n_1 P^{11} + n_2 P^{21} + n_3 P^{31} = n_i P^{i1},$$

$$P_{n2} = n_1 P^{12} + n_2 P^{22} + n_3 P^{32} = n_i P^{i2}, \qquad (4.6)$$

$$P_{n3} = n_1 P^{13} + n_2 P^{23} + n_3 P^{33} = n_i P^{i3}.$$

Сонымен, ортаның M нүктесінде алынған кез келген $\Delta\sigma_n$ ауданындағы $\vec{P}_n$ кернеу векторы (4.5) немесе (4.6) формулалары арқылы $\vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3$ кернеулерімен сызықты түрде өрнектеледі. $\vec{P}_n$ кернеу векторының, координаталар ауданындағы $\vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3$ кернеу векторларының (4.5) тәуелділігін ескеріп мына түрде жазуға болады

$$\vec{P}_n = n_i \vec{P}^i = P^{ki}\ \vec{э}_k\ n_i = \vec{P}^i \left(\vec{э}_i \cdot \vec{n}\right) = P^{ki}\ \vec{э}_k \left(\vec{э}_i \cdot \vec{n}\right). \qquad (4.7)$$

Бұл теңдік (P^{ki} коэффициентімен бірге) $\vec{n}$ векторының компоненттерінен $\vec{P}_n$ векторының компоненттеріне өтетін сызықтық түрлендіруді береді. Ол ортогональді декарт координаталар жүйесін пайдалану арқылы алынды. Бірақ тек

ортогональ декарт координаталар жүйесінде ғана емес, сонымен қатар кез келген қисық сызықты координаталар жүйесінде (4.6) теңдеуінің көмегімен P^{ki} шамасын енгізуге болады, ол тензордың контравариантты компоненттері ретінде беріледі

$$P = P^{ki} = \begin{pmatrix} P^{11} P^{21} P^{31} \\ P^{12} P^{22} P^{32} \\ P^{13} P^{23} P^{33} \end{pmatrix}. \qquad (4.8)$$

Бұл тензор **ішкі кернеулердің тензоры** немесе **жалпы кернеулер тензоры** деп аталады.

Кез келген координаталар жүйесінде (4.5) және (4.6) күшінде болғандықтан (4.7) теңдігі орындалады.

4.3. Тұтас орта динамикасының теңдеулері

Материалдық нүкте қозғалысының негізгі динамикалық теңдеуі Ньютонның 2-ші заңы болып табылады:

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{F}.$$

Материалдық нүктенің қозғалыс мөлшерінен уақыт бойынша алынған толық туынды осы материалдық нүктеге түсірілген күшке тең болады. Осы теңдеу арқылы берілген күштің әсерінен материалдық нүкте қозғалысын анықтайтын есепті шығаруға болады немесе керісінше, қозғалыс берілген болса, материалдық нүктеге әсер ететін күш табылады.

Дискретті N нүктелер жүйесіне материалдық нүктенің қозғалыс теңдеуін талдап қорытсақ, материалдық нүктелер жүйесінің қозғалыс мөлшерінің теңдеулері төмендегідей өрнектеледі:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)}.$$

Материалдық нүкте жүйелерінің қозғалыс мөлшерінен уақыт бойынша алынған толық туынды, жүйеге әсер етуші сыртқы күштердің бас векторына тең. Жүйенің ішкі күштері бір-бірін теңестіреді және жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгерісіне әсер етпейді.

Енді осы теңдеуді массалық және беттік күштердің әсерінен беті σ, көлемі V тұтас орта қозғалысы жағдайына кеңейтейік. Бұл теңдеу мына түрде жазылады:

$$\frac{d}{dt}\int_{v} \rho\vec{v}dV = \int_{v} \rho\vec{F}dV + \int_{\sigma} \vec{P}_n d\sigma. \qquad (4.9)$$

Сонымен, көлемі V тұтас ортаның қозғалыс мөлшерінен уақыт бойынша алынған толық туынды оған әсер ететін барлық сыртқы массалық және беттік күштердің қосындысына тең.

Бір текті бөлшектерден тұратын өз еркімізше алынған V көлемді **меншікті көлем** дейді. Массалық күштердің $\vec{F}$ тығыздығы кеңістіктен таңдап алынған нүктенің, уақыттың және қозғалыстағы ортаның күйіне тәуелді белгілі функция болсын.

Ньютонның екінші заңы – материалдық нүкте механикасы, дискретті нүкте жүйелерінің механикасы, абсолют қатты дене механикасының бастапқы теңдеуі ретінде саналатындығы сияқты, (4.9) теңдігі тұтас орта механикасының постулат түріндегі негізгі динамикалық арақатынасы болып табылады.

Ерекше көңіл аударатын нәрсе, тұтас орта механикасындағы қозғалыс мөлшерінің теңдеуі постулат болып саналады. Себебі оны дискретті бөлшектер жүйесін жай шекке ұмтылдырып, классикалық механикадан тікелей шығаруға болмайды.

(4.9) қозғалыс мөлшерінің теңдеуі кез келген тұтас орта қозғалысының бастапқы теңдеуі болып табылады. Соның

ішінде қарастырылып отырған көлемдегі тұтас ортаның күй характеристикалары координаталардан үздіксіз функция болмайтын жағдайында да (мысалы, соқпа процестер) (4.9) теңдеуі орынды. Қозғалыс үздіксіз болса, (4.9) қозғалыс теңдеуінің интегралдық формасын дифференциалдық түрге ауыстыруға болады.

(4.9) қатынасындағы беттік интегралды Гаусс-Остроградский формуласы бойынша көлемдік интегралға түрлендірейік:

$$\int_{\sigma} \vec{P}_n d\sigma = \int_{\sigma} n_i \vec{P}^i d\sigma = \int_{v} \nabla_i \vec{P}^i dV .$$

Енді (4.9) қозғалыс мөлшерінің теңдеуінен мынаны аламыз

$$\int_{v} \left[\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \nabla_i \vec{P}^i \right] dV = 0 .$$

Бұдан көлем V кез келген шама болғандықтан келесі дифференциалдық теңдеу шығады

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \nabla_i \vec{P}^i \ . \qquad (4.10)$$

(4.10) **тұтас орта динамикасының «кернеу» түріндегі негізгі теңдеулері делінеді. Бұл векторлық теңдеу қозғалмайтын координаталар жүйесінде, сол сияқты қозғалыстағы ілеспелі санақ жүйесінде де орындалады.** Егер қозғалыс инерциалды емес координаталар жүйесіне қатысты қарастырылса, онда $\vec{F}$ өрнегіне тасымал инерция күшін және Кориолистің инерция күшін ендіру қажет.

(4.10)-дағы векторлық теңдік (x^1, x^2, x^3) координаталар жүйесіндегі келесі үш скаляр теңдіктерге эквивалентті

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho F^i + \nabla_j P^{ij} , \qquad (4.11)$$

(4.11)-дегі үдеу компоненттері және кернеу тензорының дивергенциясы мына формулалармен анықталады

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \left(v^j \nabla_j\right) v^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k \Gamma^i_{kj} \right),$$

$$\nabla_i \vec{P}^i = \frac{\partial \vec{P}^i}{\partial x^i} + \vec{P}^k \Gamma^i_{ki} = \nabla_i P^{ij} \, \vec{э}_j,$$

$$\nabla_j P^{ij} = \frac{\partial P^{ij}}{\partial x^j} + P^{kj} \Gamma^i_{kj} + P^{jk} \Gamma^i_{jk}.$$

Сонымен, тұтас орта қозғалысының динамикалық теңдеулері –үш дифференциалдық теңдеулер жүйесі (4.11) болып табылады.

Сұйықтар мен газдар механикасында үдеуді жылдамдық арқылы өрнектейді, динамика теңдеуі «кернеу» түрінде алынады

$$\rho \left[\frac{\partial v^i}{\partial t} + (v^j \nabla_j) v^i \right] = \rho F^i + \nabla_j P^{ij}. \qquad (4.12)$$

Тік бұрышты декарт координаталар жүйесінде

$$\rho \left[\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^i}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^i}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial v^i}{\partial x^3} \right] = \rho F^i + \frac{\partial P^{i1}}{\partial x^1} + \frac{\partial P^{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial P^{i3}}{\partial x^3}$$

.

Деформацияланатын қатты дене механикасында үдеуді, орын ауыстыру векторы арқылы өрнектеген дұрыс, сонда динамикалық теңдеу

$$\rho \frac{d^2 w^i}{dt^2} = \rho F^i + \nabla_j P^{ij}. \qquad (4.13)$$

Тік бұрышты декарт координатасында төмендегідей түрде жазылады

$$\rho\frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} = \rho F^i + \frac{\partial P^{i1}}{\partial x^1} + \frac{\partial P^{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial P^{i3}}{\partial x^3}.$$

«Кернеу» түріндегі динамика теңдеуі тұтас ортаның V көлемінің үздіксіз қозғалысы үшін орындалады. Сондықтан, олар тұтас орта тепе-теңдікте болғанда да орындалады.

Егер орта тыныштықта болса, онда бөлшектердің жылдамдығы мен орын ауыстыруы нольге тең, яғни $v^i = w^i = 0.$ Бұл жағдайда (4.12) теңдеуінен келіп шығатын қорытынды, тұтас орта тепе-теңдікте болғанда көлемдік күштер ішкі беттік күштермен теңгеріледі, яғни

$$\rho F^i + \nabla_j P^{ij} = 0. \qquad (4.14)$$

(4.14) теңдеуі тұтас орта тепе-теңдігінің теңдеуі. Тік бұрышты декарт координаталар жүйесінде

$$\rho F^i + \frac{\partial P^{i1}}{\partial x^1} + \frac{\partial P^{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial P^{i3}}{\partial x^3} = 0.$$

Тепе-теңдік теңдеулері, сұйықтар мен серпімді қатты денелердің тепе-теңдігін қарастыратын гидростатика мен серпімділіктің статистикалық теориясының есептерін шығарғанда негізгі теңдеулер болып табылады.

4.4. Қозғалыс мөлшері моментінің теңдеуі

Кез келген тұтас орта қозғалысы үшін орындалатын төрт жалпылама теңдеулер алынған болатын. Олар: үзіліссіздік теңдеуі және үш қозғалыс теңдеулері. Анықталатын белгісіз функциялардың саны, теңдеулер санынан артық. Бұдан басқа қозғалыстағы ортаның дербес қасиеттеріне тәуелсіз тағыда

универсал теңдеулерді алуға болады. Осы мақсатпен механиканың басқа ортақ теңдеулерінің бірі – қозғалыс мөлшерінің моменті теңдеуін қарастырайық.

Массасы m материалдық нүкте үшін қозғалыс мөлшері моменті теңдеуінің түрі

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\vec{r}\times\vec{F},$$

ол Ньютонның екінші заңының салдары болып табылады.

Келесі теңдеу дискретті механикалық жүйелердің m_k нүктелері үшін

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k\times m_k\vec{v}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k\times\vec{F}_k^{(e)}\right),$$

оң жағындағы шамалар Ньютонның үшінші заңы бойынша тек сыртқы күштердің моменттерінің қосындысы.

Тұтас ортаның жекеленген V көлемін қарастырайық. Қозғалмайтын инерциал санақ жүйесіндегі, келесі интегралды $\int\limits_V \vec{r}\times\rho\vec{v}dV$ белгілі бір центрге қатысты V көлемдегі тұтас ортаның қозғалыс мөлшерінің моменті дейміз.

Қозғалыс мөлшерінің ішкі моменттері, массалық және беттік қос күштердің таралуы жоқ деп ұйғарайық (классикалық жағдай).

Енді жүйенің қозғалыс мөлшері моментінің теңдеуін σ бетін алып жатқан көлемі V ортаға жалпы түрде жазайық

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \vec{r}\times\rho\vec{v}dV=\int\limits_V \vec{r}\times\rho\vec{F}dV+\int\limits_\sigma \vec{r}\times\vec{P}_n d\sigma. \qquad (4.15)$$

Көлемі V тұтас орта қозғалыс мөлшері моментінен уақыт бойынша белгілі бір центрге қатысты (инерциялық санақ жүйесімен байланысты) алынған толық туынды, сол центрге қатысты осы көлемге әсер ететін сыртқы массалық және беттік күштердің моменттерінің қосындысына тең.

Бір материалдық нүкте үшін орындалатын Ньютон заңдары сияқты қозғалыс мөлшері моментінің теңдеуі де тұтас ортаның кез келген жеке V көлемі үшін постулаттар болып табылады.

Ескерте кететін нәрсе, тұтас орта үшін жазылған (4.15) теңдеуіне нүктелер жүйесі үшін жазылған динамикалық теңдеулерден шектік ауысу арқылы көшуге болмайды, себебі екеуі де постулат түріндегі теңдеу болып табылады. (4.9), (4.15) теңдеулерін кез келген тұтас орта үшін және кез келген қозғалыстарға: әрі үздіксіз, әрі характеристикалары кеңістік пен уақыт бойынша нүктелердің координаталары үзілісті болып келетін қозғалыстарға да қолдануға болады.

Тұтас орта үшін қозғалыс мөлшері моментінің теңдеуінің орындалатындығы классикалық жағдайда кернеу тензорының симметриялылығын көрсетеді. Сонымен анықтауға қажетті функциялардың саны кемиді. Үздіксіз қозғалыс жағдайында (4.15) қозғалыс мөлшері моментінің теңдеуін Гаусс-Остроградский формулаларының негізінде эквивалентті түрде жазуға болады

$$\int_V \vec{r} \times \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V \vec{r} \times \rho \vec{F} dV + \int_V \nabla_i \left(\vec{r} \times \vec{P}^i \right) dV .$$

Векторлық көбейтіндіден алынған ковариантты туынды мынаған тең

$$\nabla_i \left(\vec{r} \times \vec{P}^i \right) = \nabla_i \vec{r} \times \vec{P}^i + \vec{r} \times \nabla_i \vec{P}^i .$$

Осы формуланы келесі екі интегралдардың қосындысы түрінде көрсетуге болады

$$\int_V \vec{r} \times \left[\rho \left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt} \right) + \nabla_i \vec{P}^i \right] dV + \int_V \nabla_i \vec{r} \times \vec{P}^i dV = 0 .$$

Қозғалыстың динамикалық теңдеулерінің (4.11) нәтижесінде бұл интегралдардың біріншісі нольге айналады, сондықтан

$$\int_V \nabla_i \vec{r} \times \vec{P}^i dV = 0 ,$$

мұндағы V көлем кез келген мәнді қабылдайтындықтан

$$\nabla_i \vec{r} \times \vec{P}^i = 0, \qquad (4.16)$$

яғни классикалық жағдайда, массалық және беттік жұптар үлестірімдерінің ішкі моменттері жоқ болғанда, кинетикалық моменттің теңдеуі (4.15) түрінен (4.16)-ға көшеді, себебі $\nabla_i \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \vec{э}_i$, $\vec{P}^i = P^{ij}\,\vec{э}_j$ болғандықтан (4.16) теңдеуі мынадай түрге келеді

$$\left(\vec{э}_i \times \vec{э}_j\right) P^{ij} = 0 .$$

Соңғы теңдікті тағы былайша жазуға болады

$$\left(\vec{э}_i \times \vec{э}_j\right) P^{ij} + \left(\vec{э}_j \times \vec{э}_i\right) P^{ji} = 0$$

немесе

$$\left(\vec{э}_i \times \vec{э}_j\right)\left(P^{ij} - P^{ji}\right) = 0 .$$

Бұдан кернеу тензорының симметриялылығы келіп шығады

$$i \neq j \text{ болғанда } P^{ij} = P^{ji} .$$

Сонымен классикалық жағдайда моменттер теңдеулерінен шығатын салдар –**кернеу тензорының симметриялылығы.**

Бұрын тұтас орта қозғалысын сипаттайтын төрт универсал теңдеулер алынғаны белгілі. Енді оларға қозғалыс мөлшері моментінің үш теңдеулері қосылды. Классикалық жағдайда бұл қосымша үш теңдеулерге жаңадан енген белгісіздер жоқ, сол себепті кернеу тензорының компоненттерінің санын алтыға дейін азайтады, сонымен ізделінетін функцияның саны азаяды.

Бірақта нақты тұтас ортаны сипаттау үшін алынған үзіліссіздік теңдеуі, қозғалыс мөлшерінің моменті теңдеулерінің системасы жеткіліксіз. Теңдеулер саны оған кіретін белгісіздер санынан аз, теңдеулер жүйесі тұйықталмаған болады. Нақты тұтас ортаның тұйықталған теңдеулер жүйесін алу үшін, берілген тұтас орта параметрлерінің арасындағы қосымша арақатынасты табу керек. Тұйықталған теңдеулер жүйесін алу үшін, зерттелетін ортаның математикалық моделін жасау қажет.

Есептер мен жаттығулар

1. Белгілі бір нүктедегі P_{ij} кернеу тензоры берілген

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тұтас ортаның сол нүктесінен өтетін $\vec{n}$ бірлік нормаль векторы белгілі

$$\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k},$$

ауданшадағы кернеу векторын $\vec{P}_n$ анықтаңыз.

Шешуі. Өзімізге (4.5) формуладан белгілі

$$P_n = n_i \vec{P}^i,$$

немесе координаталар осіне проекциялары

$$P_{n1} = n_1 P^{11} + n_2 P^{21} + n_3 P^{31},$$

$$P_{n2} = n_1 P^{12} + n_2 P^{22} + n_3 P^{32},$$

$$P_{n3} = n_1 P^{13} + n_2 P^{23} + n_3 P^{33}.$$

Бірлік нормаль векторы $\vec{n}$ белгілі ауданшаның нүктесіндегі кернеу векторының компоненттері мынаған тең

$$P_{n1} = \frac{14}{3} - \frac{2}{3}, \qquad P_{n2} = \frac{10}{3}, \qquad P_{n3} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}.$$

Сонымен кернеу векторының түрі

$$\vec{P}_n = 4\vec{i} - \frac{10}{3}\vec{j}.$$

2. Ортаның белгілі бір нүктесіндегі кернеулі күйі кернеу тензорымен берілген

$$P^{ij} = \begin{pmatrix} P & aP & bP \\ aP & P & cP \\ bP & cP & P \end{pmatrix},$$

мұндағы, a, b, c – тұрақтылар, P – кернеудің белгілі бір мәндері. Бірлік нормаль векторы белгілі

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

ауданшадағы нүктенің кернеу векторы нольге тең болатындай, яғни $\vec{P}_n = 0$ a, b және c тұрақтыларын (константаларын) анықтаңыз.

Жауабы. $n_j P^{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$ теңдеулер жүйесін шеше отырып, $a = b = c = -\frac{1}{2}$ алуға болады. Сонымен шешімі тензор арқылы беріледі

$$P^{ij} = \begin{pmatrix} P & -P/2 & -P/2 \\ -P/2 & P & -P/2 \\ -P/2 & -P/2 & P \end{pmatrix}.$$

3. Ортаның белгілі бір нүктесінде кернеу тензоры берілген

$$P^{ij} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Бірлік нормаль векторы белгілі

$$\vec{n} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k},$$

ауданшадағы нүктенің кернеу векторын анықтаңыз.

Жауабы. $\vec{P}_n = -\frac{9}{7}\vec{i} + \frac{5}{7}\vec{j} + \frac{10}{7}\vec{k}$.

4. Кернеу тензорын

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

шарлық және девиаторлық бөліктерге жіктеп, девиатордың бірінші инварианты нольге тең екендігін көрсетіңіз.

Шешуі. Шарлық тензор кернеуінің түрі $P_{ij} = \frac{P_{kk}}{3}$. Бұл жерде біз мынаны аламыз $\frac{P_{kk}}{3} = (12+9+3)/3 = 8$. Осы жағдайда кернеу тензорын шарлық және девиаторлық тензорлардың қосындысы ретінде келтіруге болады

$$P_{ij} = \frac{P_{kk}}{3} + D(P) = \begin{pmatrix} P_{11} - \frac{P_{11}}{3} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} - \frac{P_{22}}{3} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} - \frac{P_{33}}{3} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \frac{P_{11}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P_{22}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P_{33}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix},$$

бұдан девиатордың бірінші инварианты нольге тең, яғни

$$J_1(D) = 4 + 1 - 5 = 0.$$

5. Кернеу тензорының инвариантын тікелей есептеу арқылы табыңыз

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

оны шарлық және девиаторлық бөліктерге жіктеңіз.

Жауабы. Инварианттар $J_1^p = P_{ii} = 21, \quad J_2^p = P_{ij}P_{ji} = 9$,

$$J_3^p = \left\| P_{ij} \right\| = 243,$$

P_{ij} кернеу тензорының шарлық тензор мен девиатордың қосындысы ретіндегі түрі

$$P_{ij} = \frac{P_{kk}}{3} + D(P) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Декарт осьтерінің $0x_1\ x_2\ x_3$ M нүктесіндегі кернеу тензорының компоненттері

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$0x'_1\ x'_2\ x'_3$ координаттар жүйесінің осьтеріне байланысты болатын кернеу тензорының бас осьтері мен бас компоненттерін анықтаңыз.

Шешуі. $\left|P_{ij} - \lambda\delta_i^j\right| = 0$ формуласына байланысты, λ-ның бас компоненттері мына теңдеуден анықталады

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

немесе мына түрде жазылады

$$(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-1) = 0.$$

Бас компоненттер осы теңдеудің түбірлері болып табылады

$$\lambda_{1`} = -2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 4.$$

x'_1 осі кернеу тензорының бас компоненттерінің λ_1 осімен сәйкес келсін және n_i^1 осы осьтің бағыттаушы косинусы болсын. Сонда $n_j P^{ij}$ формуласына сәйкес мына теңдеулер жүйесін аламыз

$$(3+2)\, n_1^1 + n_2^1 + n_3^1 = 0,$$

$$n_1^1 + 2n_2^1 + 2n_3^1 = 0,$$

$$n_1^1 + 2n_2^1 + 2n_3^1 = 0.$$

Бұдан, $n_1^1 = 0$, $n_2^1 = -n_3^1$ ал $n_i n_i = 1$ болғандықтан, $\left(n_2^1\right)^2 = \frac{1}{2}$. Сондықтан $n_1^1 = 0$, $n_2^1 = 1/\sqrt{2}$, $n_3^1 = -1/\sqrt{2}$.

Осы сияқты x_2^1 осі кернеу тензорының бас компоненттерінің λ_2 осіне сәйкес келсін. Сонда

$$2n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0,$$

$$n_1^2 - n_2^2 + 2n_3^2 = 0,$$

$$n_1^2 + n_2^2 - n_3^2 = 0,$$

бұдан $n_1^2 = 1/\sqrt{3}$, $n_2^2 = -1/\sqrt{3}$, $n_3^2 = -1/\sqrt{3}$.

Соңында x_3^1 осі λ_3-ке сәйкес келсін. Сонда

$$-n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 = 0,$$

$$n_1^3 - 4n_2^3 + 2n_3^3 = 0,$$

$$n_1^3 + 2n_2^3 - 4n_3^3 = 0,$$

бұдан $n_1^3 = -2/\sqrt{6}$, $n_2^3 = -1/\sqrt{6}$, $n_3^3 = -1/\sqrt{6}$.

7. Бір кернеулі күйге сәйкес бас компоненттерді табыңыз

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Жауабы. Кернеу тензорының бас компоненттерінің шамасы характеристикалық теңдеудің түбірлеріне тең

$$\left| P_{ij} - \lambda \delta_i^j \right| = 0, \text{ яғни } \quad \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 8, \quad \lambda_3 = 3.$$

8. Лагранж айнымалылары

$$\frac{d}{dt}(\rho J)=0, \quad \text{мұндағы} \quad J=\left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi k}\right| \neq 0.$$

және Эйлер айнымалылары

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}=0$$

арқылы өрнектелген үзіліссіздік теңдеулері эквивалентті екендігін дәлелдеңіз.

Шешуі. Лагранж айнымалылары арқылы өрнектелген үзіліссіздік теңдеуін дифференциалдайық

$$\frac{d}{dt}(\rho J)=\frac{d\rho}{dt}J+\rho\frac{dJ}{dt}=0$$

төмендегі формуланы пайдаланып

$$\frac{dJ}{dt}=J\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,,$$

мынаны аламыз

$$\frac{d}{dt}(\rho J)=J\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)=0.$$

9. Жылдамдық өрісі $v_i = A\frac{x_i}{r^3}$, мұндағы $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. A – тұрақтысының сығылмайтын ортадағы үзіліссіздік теңдеуін қанағаттандыратынын көрсетіңіз.

Шешуі. сығылмайтын ортада әрбір бөлшектің массасының тығыздығы уақытқа тәуелсіз, яғни $\frac{d\rho}{dt}=0$ және үзіліссіздік теңдеуі

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

мынадай түрге келеді

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 .$$

Есептің шарты бойынша

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = A\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{3x_i x_j}{r^5}\right) = A\left(\delta_{ij} / r^3 - 3x_i x_j / r^5\right),$$

сондықтан, $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = (3-3)/r^3$. Сонымен жылдамдық өрісі сығылмайтын ортада үзіліссіздік теңдеуін қанағаттандырады.

10. Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдықтар өрісінің түрі

$$v_1 = a(t)x, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

Қозғалыстағы ортаның тығыздығын анықтаңыз.

Жауабы. $\rho = \rho_0 \exp\left(-\int_0^t a(t)dt\right)$.

11. Егер жылдамдықтар өрісі берілген болса

$$v_1 = 2x_1^2 + x_2, \quad v_2 = 2x_2^2 + x_3, \quad v_3 = 2x_3^2 + x_1,$$

сығылмайтын орта үшін үзіліссіздік теңдеуін құрыңыз және жылдамдық дивергенциясының өрнегін табыңыз.

Жауабы. $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 4(x_1 + x_2 + x_3)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\rho\left(2x_1^2+x_2\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\rho\left(2x_2^2+x_3\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\rho\left(2x_3^2+x_1\right)\right]=0.$$

12. Сығылмайтын ортаның жазық ағыны берілген

$$v_1=A\frac{x_1^2-x_2^2}{r^4},\qquad v_2=A\frac{2x_2x_2}{r^4},\qquad v_3=0.$$

мұндағы $r^2=x_1^2+x_2^2$. Осындай жылдамдықтар өрісі үзіліссіздік теңдеуін қанағаттандыратынын дәлелдеңіз.

Жауабы. $\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0$.